数理解析研究所講究録
560巻 1985年 64-72

Passivity on UHF C^*-algebras

阪大基礎工　楠田雅治（Masaharu Kusuda）

$\mathfrak{A}$をC^*-環，αを$\mathfrak{A}$の強連続1径数自己同型写像群とする。本稿ではαとして1径数しか扱わないので，3つの組，$(\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha)$を単に$C^*$-力学系と呼ぶことにする。

さて熱力学の第2法則に基づいてPusz-Woronowicz [5]は受動状態の概念を導入した。われわれにとってわかりやすい数学的定式化は次のものである。すなわち，φを$\mathfrak{A}$の状態としたとき，φが$\mathfrak{A}$の受動状態であるとは，

$$-i\varphi(u^*\delta(u))\geq 0$$

が$\mathfrak{A}$のユニタリー群の単位元の連結成分とδの定義域$D(\delta)$に属するすべての元uに対して成立することである。ただしδはαの生成作用素とする。このφはもちろんα-不変な状態であり，いくつかのα-不変状態の重要なクラスを含む。例えば，β-KMS状態（$\beta\geq 0$）や基底状態などはすべて受動状態である。実際，基底状態が，受動的なのは基底状態の定義あるいは特徴付けから明らかであり，

$\beta > 0$ のときは Sewell の条件 $-i\beta\varphi(x^*\delta(x)) \geqq \varphi(x^*x)\log\left(\frac{\varphi(x^*x)}{\varphi(xx^*)}\right)$ $({}^\forall x \in D(\delta))$ からすぐわかる。さらに $\beta = 0$ のときは、φ はトレースだから、δ が微分であることを使えば、容易に $\varphi(x^*\delta(x)) = 0$ となって上の事がわかる。逆は一般には成り立たない。実際、受動状態の凸結合は受動的である。しかし、異なる β に対するKMS状態の凸結合はKMS状態でも基底状態でもない。

今 $x = x^* \in D(\delta)$ なら、$t \in \mathbb{R}$ に対して

$$-i\varphi(e^{-itx}\delta(e^{itx}))$$
$$= t\varphi(\delta(x)) + \frac{t^2}{2}i\varphi([\delta(x), x]) + O(t^3)$$

とテーラー展開できる。φ が受動状態ならば、上の式は

$$(1)\begin{cases} \varphi(\delta(x)) = 0 \\ i\varphi([\delta(x), x]) \geqq 0 \end{cases}$$

を意味する。さらに $[\delta(x), x] = \delta(x^2) - 2x\delta(x)$ だから

$$(2) \qquad -i\varphi(x\delta(x)) \geqq 0$$

を得る。すなわち (1) ⇒ (2) がわかる。容易に (2) ⇒ (1) もわかるから、次の3つの条件

(i) φ は受動状態、

(ii) $\varphi(\delta(x)) = 0$, $i\varphi([\delta(x), x]) \geqq 0$ $\quad {}^\forall x \in D(\delta)$, $(x = x^*)$.

(iii) $-i\varphi(x\delta(x)) \geqq 0$ $\quad {}^\forall x = x^* \in D(\delta)$

を考えると (i) ⇒ (ii) ⇔ (iii) がわかる。

φが$\mathfrak{A}$上のα－不変状態としよう。$(-\infty,0)$に対する$\mathfrak{A}$のスペクトル部分空間を$\mathfrak{A}^\alpha((-\infty,0))$とする。$\mathfrak{A}^\alpha((-\infty,0))\ni{}^\forall x$に対して、

$$\varphi(x^*x)\leqq\varphi(xx^*)$$

が成り立つときφはスペクトル的受動状態と呼ばれる。De Cannière[1]はφがスペクトル的受動状態になるための必要十分条件は条件(iii)，すなわち，$D(\delta)\ni{}^\forall x=x^*$に対して$-i\varphi(x\delta(x))\geqq 0$が成り立つであることを示した。したがって受動状態はいつもスペクトル的受動状態である。今条件(i)～(iii)が同値かどうか考えたいが，一般にはわからない。そこで少し限定されたC*－力学系の下で考えることにする。その枠組を今説明することにしよう。

境[6,7,8]は，UHF C*環上の可換正規*－微分の概念を導入した。その微分は次の様に定義される。$\mathfrak{A}$をUHF C*－環とする。δ_0が可換正規*－微分であるとは，$\mathfrak{A}$の有限I型部分因子の増加列$\{\mathfrak{A}_n\}$が存在して$1\in\mathfrak{A}_n$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$が$\mathfrak{A}$で稠密，かつ$D(\delta_0)$に等しい。さらに，$\mathfrak{A}$の自己共役元の列$\{h_n\}$が存在して，それらは互いに可換で$\delta_0(x)=i[h_n,x]$，${}^\forall x\in\mathfrak{A}_n$ $(n=1,2,\cdots)$が成り立つ時である。この時[6]によってδ_0は自然にδに拡張でき，$\exp(t\delta)(x)=\lim_{n\to\infty}\exp(t\delta_{ih_n})(x)$ ${}^\forall x\in\mathfrak{A}$.

ここで $\delta_{ih_n} = [ih_n, \cdot]$ を表わすものとする。今，
$\alpha_t = \exp(t\delta)$ とおいて UHF C^*-環の C^* 力学系
$(\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha)$ を得る。この状況において当初の問題を考える。

もし $\delta(D(\delta)) \subset D(\delta)$ ならば δ は有限型と言う。

定理　δ が有限型であるとき次の条件 (i) ～ (iv) は同値。

(i) $\mathfrak{A}$ の状態 φ は α に対してスペクトル的受動状態である。

(ii) $\varphi(\delta(x)) = 0$ かつ $i\varphi([\delta(x), x]) \geq 0$　$^\forall x = x^* \in D(\delta)$ が成り立つ。

(iii) $-i\varphi(x\delta(x)) \geq 0$　$^\forall x = x^* \in D(\delta)$ が成り立つ。

(iv) $\mathfrak{A}$ の状態 φ は α に対して受動状態である。

定理を証明するためにまず補題を示す。

補題．$(\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha)$ を C^* 力学系，$\mathfrak{A}$ は有限次元 C^* 環とする。そのとき $\mathfrak{A}$ 上のスペクトル的受動状態 φ は，受動状態である。

証明．まず $\mathfrak{A}$ が $n \times n$ 全行列環と仮定しよう。
τ を $\mathfrak{A}$ 上のトレース状態とすると φ は，$\mathfrak{A}$ の正の元 ρ によって $\varphi(x) = \tau(\rho x)$，$\tau(\rho) = 1$　$x \in \mathfrak{A}$ の様に表わされる。

今αは $\alpha_t(x)=e^{ith}xe^{-ith}$ $x\in\mathfrak{A}$, ($h=h^*\in\mathfrak{A}$) と書かれ，ρとhは可換である。 $h=\sum_{i=1}^{n}h_ie_{ii}$ $h_i\in\mathbb{R}$, $\rho=\sum_{i=1}^{n}\rho_ie_{ii}$ $\rho_i\geqq 0$. $\sum\rho_i=1$ と仮定してよい。ここで $\{e_{ij}\}$ は $\mathfrak{A}$の行列単位である。 $x=e_{ij}+e_{ji}$ ととると

$$-i\varphi(x\delta(x))=(\rho_i-\rho_j)(h_j-h_i)\geqq 0$$

となることに注意しよう。 $\mathfrak{A}\ni u=(u_{ij})$ をユニタリー行列とする。 そのとき

$$\tau(\rho u^*hu)=\sum_{i,j}\rho_ih_j|u_{ij}|^2$$

$$\tau(\rho h)=\sum\rho_ih_i$$

が成り立つ。 $(|u_{ij}|^2)_{i,j}$ は重確率行列だから，Birkhoff-von Neumannの定理から

$$\tau(\rho u^*hu)=\sum_{\sigma}\lambda_\sigma\sum_i\rho_ih_{\sigma(i)}$$

$\lambda_\sigma\geqq 0$. $\sum_\sigma\lambda_\sigma=1$ と表わせる。 ここでσは$1,2,\cdots,n$の置換全体を動くものとする。 $(\rho_i-\rho_j)(h_j-h_i)\geqq 0$ だから

$$\sum_i\rho_ih_{\sigma(i)}\geqq\sum_i\rho_ih_i$$

を得る。 これは $-i\varphi(u^*\delta(u))\geqq 0$ を意味する。

次に一般の有限次元C*環の場合を考える。 αは有界微分δによって $\alpha_t=e^{t\delta}$と表わされ，$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^{**}$ だから，$\delta=[ih,\cdot]$ $h\in\mathfrak{A}^{**}=\mathfrak{A}$と書けることに注意する。

$\mathfrak{A}$は有限次元だから $\mathfrak{A}=\sum^{\oplus}\mathfrak{A}p_j$ と中心分解できる。
$\delta(p_j)=0$ に注意して計算すれば $\mathfrak{A}\ni u$ をユニタリーとすると

$$-i\varphi(u^*\delta(u)) = \sum_j -i\varphi((up_j)^*\delta(up_j)) \geq 0$$

となる。 Q.E.D.

定理の証明. δ_0は有限型だから $h_n\in D(\delta_0)$ と仮定できる。$\mathfrak{A}_n$ と h_nで生成される$\mathfrak{A}$の C^*-部分環を $\mathfrak{B}_n$ とする。そのとき $\mathfrak{B}_n$ は α-不変だから、C^*-力学系 $(\mathfrak{B}_n, \mathbb{R}, \alpha)$ $n=1,2,\cdots$ が考えられる。さらにすべてのnについて $\mathfrak{B}_n$ は有限次元C^*環である。

今φをスペクトル的受動状態として φが受動的であることを示せばよい。補題から φは $(\mathfrak{B}_n, \mathbb{R}, \alpha)$ に対して受動的であることがわかる。$D(\delta)\ni u$ をユニタリーとする。そのとき、容易に、uは次の形、

$$e^{ia_1}e^{ia_2}\cdots\cdots e^{ia_m}$$

$a_1=a_1^*,\ a_2=a_2^*,\ \cdots,\ a_m=a_m^* \in D(\delta)$

と書けることがわかる。$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$は$\delta$の核だから 各$j$ $(1\leq j\leq m)$ に対して $\mathfrak{A}_n\ni a_{j(n)}$ $1\leq j\leq m$ が選べて $a_{j(n)}=a_{j(n)}^*$

$$\|a_{j(n)}-a_j\|\to 0$$

$$\|\delta(a_{j(n)})-\delta(a_j)\|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

とできる。そのとき各jに対して

$$\sup_n \| \delta(a_{j(n)}) \| = C_j < +\infty \text{ . ,}$$

一方 Powers［3］から．

$$\delta(e^{ia_{j(n)}}) = i\int_0^1 e^{ita_{j(n)}} \delta(a_{j(n)}) e^{i(1-t)a_{j(n)}}\, dt$$

$\forall n$ だから，各 j について

$$\sup_n \| \delta(e^{ia_{j(n)}}) \| \leqq C_j \text{ .}$$

今 $u_n = e^{ia_{1(n)}} e^{ia_{2(n)}} \cdots e^{ia_{m(n)}}$ とおく。すぐに，$u_n \in \mathfrak{B}_n$．かつ $\| u_n - u \| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$ がわかる。

さらに

$$\begin{aligned} \| \delta(u_n) \| &\leqq \sum_{j=1}^m \| \delta(e^{ia_{j(n)}}) \| \\ &\leqq \sum_{j=1}^m C_j = C \end{aligned}$$

がすべての $n \geqq 1$ について成り立つ。$-i\varphi(u_n^* \delta(u_n)) \geqq 0$ だから，$\varphi(u_n^* \delta(u_n)) \longrightarrow \varphi(u^* \delta(u))$ を示せばよい。

しかし $\varphi \circ \delta = 0$ に注意すれば．

$$\begin{aligned} &| \varphi(u_n^* \delta(u_n)) - \varphi(u^* \delta(u)) | \\ &\leqq \| u_n - u \| \| \delta(u_n) \| + | \varphi(\delta(u^*) u_n) - \varphi(\delta(u^*) u) | \\ &\leqq (C + \| \delta(u) \|) \| u_n - u \| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

が得られ証明が終わる。　Q.E.D.

文献

[1] J. De Cannière, A spectral characterization of KMS states, Comm. Math. Phys. 84 (1982), 187–206

[2] A. Lenard, Thermodynamical proof of the Gibbs formula for elementary quantum systems, J. Stat. Phys. 19 (1978), 575–586.

[3] R. T. Powers. A remark on the domain of an unbounded derivation of a C* algebra, J. Funct. Anal. 18 (1975) 85–95.

[4] R. T. Powers – S. Sakai, Unbounded derivations in operator algebras, J. Funct. Anal. 19 (1975), 81–95.

[5] W. Pusz – S. L. Woronowicz, Passive states and KMS states for general quantum systems Comm. Math. Phys. 58 (1978) 273–290

[6] S. Sakai, On commutative normal * derivations, Comm. Math. Phys. 43 (1975) 39–40

[7] S. Sakai, On commutative normal * derivations II, J. Funct. Anal. 21 (1976) 203–208.

[8] S. Sakai, On commutative normal *-derivations III, Tôhoku Math. Jour. 28 (1976) 583-590.